Θεωρία Γραφημάτων

Μάθημα 2° 26/10/2018

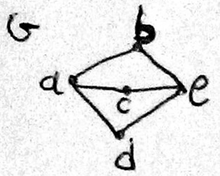
email: aptsiakalos@hotmail.com

Πρόοδος απαλλακτική
18/01/2019
ή
11/01/2019
$6^{00}-9^{00}$ μ.μ.
θα οριστικοποιηθεί πριν τα Χριστούγεννα
ΥΛΗ ΙΔΙΑ ΜΕ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

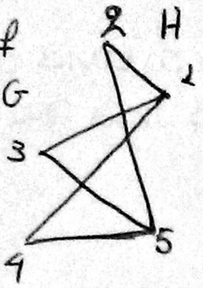
ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ:

Μια 1-1 και επί απεικόνιση $f: V(G) \to V(H)$, τέτοια ώστε $\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$ λέγεται ισομορφισμός

Παράδειγμα: (περσινό θέμα)



θέλουμε μια συνάρτηση f που να απεικονίζει το G στο H



Απάντηση:

$f(a)=1$
$f(b)=2$
$f(c)=3$
$f(d)=4$
$f(e)=5$

εξακολουθώ να διατηρώ τα ζευγάρια που ενώνονται (τις ίδιες ακμές δηλαδή)

Αντιπαράδειγμα: $\{a,b\} \in E(G)$

$$\{\underset{3}{f(a)}, \underset{4}{f(b)}\} \notin E(H)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

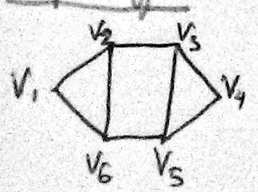
Η σχέση $G \simeq H$ είναι
- αυτοπαθής $G \sim G$
- συμμετρική $G \simeq H \Leftrightarrow H \sim G$
- μεταβατική $G_1 \simeq G_2$ και $G_2 \simeq G_3 \Rightarrow G_1 \simeq G_3$

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ:

Ένα γράφημα G με $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν $n \times n$ πίνακα

$$A = [a_{ij}], \text{ όπου } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{αν } (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Παράδειγμα:



Έχουμε 6 κορυφές, άρα χρειαζόμαστε έναν 6×6 πίνακα για αναπαράσταση

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Σε μη-προσανατολισμένα γραφήματα (όπως το παραπάνω), ο πίνακας αναπαράστασης είναι συμμετρικός
- Η διαγώνιος είναι μηδέν
- Με n κορυφές μπορούν να προκύψουν n! γραφήματα

Οι πίνακες αναπαράστασης είναι χρήσιμοι στις συγκινωνίες

ΒΑΘΜΟΣ ΚΟΡΥΦΗΣ:

$N_G(V_3) = \{V_2, V_5, V_4\}$: Σύνολο κορυφών με τις οποίες συνδέεται η κορυφή V_3 (Υπάρχουν δηλαδή 3 ακμές που ξεκινούν από το V_3)

Τότε ο βαθμός της κορυφής V_3 είναι:

$$\deg_G(v_3) = |N_G(V_3)| = 3$$

Στο V_3 προσπίπτουν 3 ακμές

$\delta(G)$: ελάχιστος βαθμός του γραφήματος (ο μικρότερος βαθμός από τους βαθμούς όλων των κορυφών)

$\Delta(G)$: μέγιστος βαθμός του γραφήματος G

$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$: μέσος βαθμός του γραφήματα G
όπου n: πλήθος κορυφών

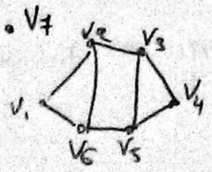
$\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$: πυκνότητα γραφήματος
όπου m: πλήθος ακμών
n: πλήθος κορυφών

ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΗ ΚΟΡΥΦΗ: Μια κορυφή ονομάζεται απομονωμένη αν ο βαθμός της είναι μηδέν

ΕΚΚΡΕΜΗΣ ΚΟΡΥΦΗ: Μια κορυφή ονομάζεται εκκρεμής αν ο βαθμός της είναι 1.

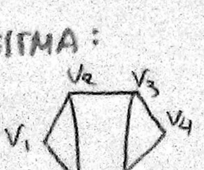
ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΚΟΡΥΦΗ: " " " Καθολική αν ο βαθμός της είναι $n-1$ (αν ενώνεται δηλαδή με όλες τις υπόλοιπες κορυφές)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Το V_7 είναι απομονωμένο αλλά ανήκει στο γράφημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$\deg_G(v_1) = \deg_G(V_4) = 2$

$\deg_G(V_2) = \deg_G(V_3) = \deg_G(V_5) = \deg_G(V_6) = 3$

$\delta(G) = 2$

$\Delta(G) = 3$

$d(G) = \frac{1}{6}(3 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$\varepsilon(G) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: i) Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι άρτιος αριθμός

δηλαδή: $\sum_{v\in V(G)} deg_G(v) = 2m$

ii) $\delta(G) \le d(G) \le \Delta(G)$

iii) $\varepsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$

ΛΗΜΜΑ: Κάθε γράφημα περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού

Απόδειξη:

Έστω $V(G) = V_1 \cup V_2$, όπου V_1: σύνολο κορυφών με περιττό βαθμό

" V_2: " " με άρτιο βαθμό

Άρα $\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in V_1} deg_G(v) + \sum_{v\in V_2} deg_G(v) \quad (1)$

Ακόμη από το Θεώρημα γνωρίζουμε ότι $\sum_{v\in V(G)} deg_G(v) = 2m \ (2)$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\sum_{v\in V_1} deg_G(v) = 2m - \sum_{v\in V_2} deg_G(v)$$

όπου $\sum_{v\in V_2} deg_G(v)$ είναι άρτιος, ως άθροισμα αρτίων αριθμών

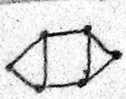
Άρα $\sum_{v\in V_1} deg_G(v) = 2\kappa$, δηλαδή άρτιος

$\square$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ:

Μια φθίνουσα ακολουθία $\gamma := \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, όπου $d_1 \ge d_2 \ge \dots \ge d_n$, καλείται γραφική αν υπάρχει G με n κορυφές $v_1, \dots, v_n$ και βαθμούς $d_1, \dots, d_n$ αντίστοιχα. Το γράφημα G θα λέμε ότι πραγματοποιεί την ακολουθία γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$\gamma = \langle 3,3,3,3,2,2 \rangle$

φθίνουσα ακολουθία βαθμών

$\forall i,\ 0 \le d_i \le n-1$

Για να προχωρήσουμε στον έλεγχο της γραφικότητας πρέπει να ισχύει το λήμμα.